DEVOIR DE SYNTHESE N°2

4 ème Math 1+2 Durée : 4h

Exercice n°1

Dans un plan orienté on considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Pour la figure, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. On pose f = r_C o r_A.
   a) Déterminer les images par f des points A et B.
   b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer le point O sur la figure.
   c) Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?
2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par S. H le milieu de [BC] et H' son image par S.
   a) Donner une mesure de l'angle de S et montrer que C' $\in$ (OA).
   b) Déterminer S([OA]) et montrer que H' est le milieu de [OB].
   c) Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.
3. Soit l'application g = S o $S_{(OA)}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice n°2

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit θ un réel de $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ et $F_\theta : P \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \ / \ z' = (\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta)z + (\sin^2\theta - i\cos\theta\sin\theta)$$

1. a) Déterminer la nature de F_0 et F_π.
   b) On prend $\theta \in \left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Déterminer suivant les valeurs de θ le centre le rapport et l'angle de la similitude directe F_θ.
2. On prend $\theta = \frac{\pi}{4}$, M_0 le point d'affixe 2 et A le point d'affixe 1. Posons F = $F_{\frac{\pi}{4}}$.
   On note $M_n = \underbrace{F o F o ....o F}_{n\ fois}(M_0) \quad \forall\ n \in IN^*$
   a) Vérifier que $\forall\ n \in IN$ $M_{n+1} = F(M_n)$ et $M_{n+4} = FoFoFoF(M_n)$.
   b) En déduire que $\overrightarrow{AM_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AM_n}$.
   c) On note z_n l'affixe de M_n et $r_n = |z_n - 1|$ $(n \in IN)$.
   Montrer que (r_n) est une suite géométrique.
   d) Montrer que $\forall\ n \in IN$, $r_{n+1} = M_nM_{n+1}$.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\boxed{A}$

Soit f la fonction sur IR par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Représenter la courbe $\mathcal{C}$ de f dans le repère $\mathcal{R}$.

$\boxed{B}$

Soit F la fonction de IR dans IR définie par : $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)\, dt$.

1. a) Justifier l'existence de F pour tout réel x.
   b) Montrer que F est dérivable sur IR puis calculer F '(x).
   c) Vérifier que F ' est impaire et en déduire que F est paire.
2. a) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$x - 1 < f(x) < x - 1 + \frac{1}{x}.$$

   b) En déduire que pour $x > 1$:

$$2x < F(x) < 2x + \text{Log}\left(1 + \frac{2}{x}\right).$$

   c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [F(x) - 2x]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Soit g la fonction définie par $g(t) = \text{Log}\left(t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 2}\right)$

   et $J = \int_0^2 \frac{(t-1)^2}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} dt$.

   a) Montrer que g est dérivable sur IR puis calculer sa dérivée.
   b) En déduire F (0) – J.
   c) En calculant J par parties montrer que $F(0) + J = 2\sqrt{2}$.
   d) Déduire F (0).
4. a) Etudier les variations de F.
   b) Représenter la courbe Γ de F dans le repère $\mathcal{R}$.

$\boxed{C}$

On pose pour tout $t \in$ IR , $h(t) = f(1 - t)$ et (I_n) la suite définie sur IN* par :

$$I_n = \int_0^1 t^n h(t)\, dt.$$

1. a) Etudier le sens de variation de la suite (I_n).
   b) Démontrer que (I_n) est convergente.
2. Montrer que si $t \in [0, 1]$

$$0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1 + t^2} \le 1 - t.$$

3. a) Montrer que pour tout $n \in$ IN* :

$$0 \le \frac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.